Elementi di Analisi Matematica e Ricerca Operativa – prova del 09 gennaio 2017

1) Discutere il seguente problema di Programmazione Lineare:
Trovare il massimo di $p(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5$
con i vincoli $x_k \ge 0 \ (1 \le k \le 5)$ e

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 5 \\ -x_1 - 4x_3 + x_5 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 11 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \sum_{j=1}^{5} x_j A_j = B$$

(può essere utile notare che $A_2 = 2A_1 - A_4 + 2A_5$, $A_3 = A_1 + A_4 - 3A_5$ e $B = 3A_1 + 2A_4 + A_5$).

Svolgimento. Seguendo l'indicazione fornita scegliamo come base di $\mathcal{A}^* = \mathbb{R}^3$, l'insieme $\mathcal{B}_1 = \{A_1, A_4, A_5\}$.
Si costruisce allora la prima tabella del simplesso come segue:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_1$	$c_{v_1} = c_1 = 4$	1	2	1	0	0	3
$x_{v_2} = x_4$	$c_{v_2} = c_4 = 3$	0	−1	1	1	0	2
$x_{v_3} = x_5$	$c_{v_3} = c_5 = 4$	0	2	−3	0	1	1
		0	10	−10	0	0	16
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome $z_3 - c_3 < 0$ e almeno uno degli $\alpha_{\ell,3}$ è positivo, bisogna operare la "trasformazione pivotale" facendo entrare nella base il vettore A_3 al posto di uno di quelli presenti. Il criterio di uscita impone di calcolare

$$\frac{\beta_1}{\alpha_{1,3}} = 3 \quad \text{e} \quad \frac{\beta_2}{\alpha_{2,3}} = 2 .$$

Siccome il minore dei due è $\dfrac{\beta_2}{\alpha_{2,3}} = 2$, esce il vettore $A_{v_2} = A_4$. La trasformazione pivotale avviene operando sulle righe della matrice della tabella in modo che le colonne della base canonica figurino, nell'ordine, in corrispondenza di A_1, A_3, A_5. Con semplici calcoli si ottiene la nuova tabella del simplesso relativa alla base $\mathcal{B}_2 = \{A_1, A_3, A_5\}$:

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	B
$x_{v_1} = x_1$	$c_{v_1} = c_1 = 4$	1	3	0	−1	0	1
$x_{v_2} = x_3$	$c_{v_2} = c_3 = 5$	0	−1	1	1	0	2
$x_{v_3} = x_5$	$c_{v_3} = c_5 = 4$	0	−1	0	3	1	7
		0	0	0	10	0	42
		$(z_1 - c_1)$	$(z_2 - c_2)$	$(z_3 - c_3)$	$(z_4 - c_4)$	$(z_5 - c_5)$	(z)

Siccome adesso tutti gli $z_j - c_j$ sono ≥ 0, l'algoritmo è terminato; la funzione obiettivo ha massimo nella regione ammissibile, il massimo vale $z = 42$ ed è assunto per $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (1,0,2,0,7)$.

2) Per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ sia $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\varphi^{(n)}(n) - \varphi^{(n)}(-n) \right)$. ($\varphi^{(n)}$ è la derivata n-esima di φ).

a) Dimostrare che T è una distribuzione, cioè che è lineare e soddisfa la condizione di "limitatezza" necessaria e sufficiente per la continuità.
b) Stabilire se T ha ordine finito, e in caso affermativo dire qual è tale ordine.
c) Verificare che T non è pari né dispari.

Svolgimento.

a) Evidentemente T è lineare. Ora vogliamo dimostrare che: per ogni sottoinsieme compatto K di $\mathbb{R}$ esistono $M > 0$ e un numero naturale m tali che: per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ con $supp(\varphi) \subseteq K$ si ha

(*) $$\left| \langle T, \varphi \rangle \right| \le M \cdot \max_{0 \le h \le m} \max_{x \in K} \left| \varphi^{(h)}(x) \right| .$$

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto. Allora esiste $L > 0$ tale che $K \subseteq [-L, L]$; non è restrittivo supporre che L sia intero, questo farà comodo tra poco. Se $supp(\varphi) \subseteq K$ allora

$$\left| \langle T, \varphi \rangle \right| \le \sum_{n=1}^{L} n \cdot \left(\left| \varphi^{(n)}(n) \right| + \left| \varphi^{(n)}(-n) \right| \right) \le 2 \max_{1 \le n \le L} \max_{x \in K} \left| \varphi^{(n)}(x) \right| \sum_{n=1}^{L} n = L(L+1) \max_{1 \le n \le L} \max_{x \in K} \left| \varphi^{(n)}(x) \right| \sum_{n=1}^{L} n$$

quindi vale (*) con $m = L$ e $M = L(L+1)$.

b) Il ragionamento condotto per (a) mostra che T non ha ordine finito; infatti il valore di m in (*) dipoende da L, quindi dal compatto K, e può assumere valori arbitrariamente grandi se K è opportunamente ampio.

c) Se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ è una funzione *pari* allora sono tali tutte le sue derivate di ordine pari, mentre quelle di ordine dispari sono funzioni dispari. Allora

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{h=1}^{\infty} 2 \cdot (2h-1) \cdot \varphi^{(2h-1)}(n)$$

perché $\varphi^{(2h-1)}(-n) = -\varphi^{(2h-1)}(n)$. In generale l'espressione ottenuta per $\langle T, \varphi \rangle$ non è nulla; quindi T non è dispari perché se lo fosse, allora sarebbe $\langle T, \varphi \rangle = 0$ per ogni φ pari.

Analogamente si verifica che se φ è *dispari*, in generale non è $\langle T, \varphi \rangle = 0$, quindi T non è pari.

3) Verificare in base alla definizione di limite, che $\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{x+2}{x^3}} \cdot \ln\left(\frac{2x+1}{x} \right) = \ln 2$.

Svolgimento. Ciò che si deve mostrare è che

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists S > 0 \, , \forall x \left(x \in]S, +\infty[\Rightarrow \left| e^{\frac{x+2}{x^3}} \cdot \ln\left(\frac{2x+1}{x} \right) - \ln 2 \right| < \varepsilon \right).$$

Sia dunque $\varepsilon > 0$. Per ogni $x > 0$ possiamo scrivere

$$\left| e^{\frac{x+2}{x^3}} \cdot \ln\left(\frac{2x+1}{x} \right) - \ln 2 \right| \le \left| e^{\frac{x+2}{x^3}} \cdot \ln\left(\frac{2x+1}{x} \right) - e^{\frac{x+2}{x^3}} \ln 2 \right| + \left| e^{\frac{x+2}{x^3}} \ln 2 - \ln 2 \right| = e^{\frac{x+2}{x^3}} \cdot \left| \ln\left(\frac{2x+1}{2x} \right) \right| + \ln 2 \cdot \left| e^{\frac{x+2}{x^3}} - 1 \right| .$$

Adesso cerchiamo di rendere $< \frac{\varepsilon}{2}$ ciascuno dei due addendi all'ultimo membro. Intanto, se $x > 1$ allora l'esponente di e è $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} < 3$, quindi $e^{\frac{x+2}{x^3}} < e^3$. Poi, per $x > 1$, $\frac{2x+1}{2x} > 1$ quindi $\ln\left(\frac{2x+1}{2x} \right) > 0$ e allora

$$\left|\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)\right| < e^{-3}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right) < e^{-3}\cdot\frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow 1+\frac{1}{2x} < e^{e^{-3}\cdot\frac{\varepsilon}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} < 2\left(e^{e^{-3}\cdot\frac{\varepsilon}{2}}-1\right) \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}\frac{1}{e^{e^{-3}\cdot\frac{\varepsilon}{2}}-1} \equiv S_1 .$$

Poi, per $x>0$, l'esponente di $e^{\frac{x+1}{x^3}}$ è positivo, quindi $e^{\frac{x+1}{x^2}}-1>0$. Allora

(*) $$\ln 2\cdot\left|e^{\frac{x+2}{x^3}}-1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow e^{\frac{x+2}{x^3}} < \frac{\varepsilon}{2\ln 2}+1 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x^3} < \ln\left(\frac{\varepsilon}{2\ln 2}+1\right).$$

Se supponiamo $x>2$, allora

$$\frac{x+2}{x^3} < \frac{2x}{x^3} = \frac{2}{x^2} < \frac{2}{x}$$

Perciò se $\frac{2}{x} < \ln\left(\frac{\varepsilon}{2\ln 2}+1\right)$, ossia

$$x > \frac{2}{\ln\left(\frac{\varepsilon}{2\ln 2}+1\right)} \equiv S_2$$

allora anche l'ultimo membro di (*) è minore di $\ln\left(\frac{\varepsilon}{2\ln 2}+1\right)$, quindi è soddisfatta la disuguaglianza

$$\ln 2\cdot\left|e^{\frac{x+2}{x^3}}-1\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

In conclusione, se $x > S \equiv \max\{2, S_1, S_2\}$, allora $\left|e^{\frac{x+2}{x^3}}\cdot\ln\left(\frac{2x+1}{x}\right)-\ln 2\right| < \varepsilon$; ciò conclude la verifica.

4) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^2, tale che $f(0)=f'(0)=0$, e per ogni $x\in\mathbb{R}$, $|f''(x)|\le 10$.

a) Mostrare che $|f(100)|<10^5$ (o passare direttamente a (b))

b) Mostrare che la disuguaglianza di (a) può essere migliorata: $|f(100)|\le\frac{1}{2}\cdot 10^5$; mostrare inoltre che questa stima è la migliore possibile, cioè, con le ipotesi a disposizione non si può dedurre una maggiorazione più precisa.

Svolgimento.

a) Per il Teorema di Lagrange applicato a *f* nell'intervallo $[0,100]$, esiste $c\in\,]0,100[$ tale che

$$f(100)=f(100)-f(0)=100\,f'(c)$$

Il Teorema di Lagrange si può applicare anche a f' nell'intervallo $[0,c]$, e ci dice che esiste $d\in\,]0,c[$ tale che

$$f'(c)=f'(c)-f'(0)=c\cdot f''(d).$$

Combinando le due relazioni ottenute e applicando l'ipotesi $|f''(x)|\le 10$ abbiamo

$$|f(100)|=100|f'(c)|=100c\cdot|f''(d)|<10^5$$

perché $0<d<c<100$ e $|f''(d)|<10$.

b) Anziché il Teorema del valor medio, applichiamo il Teorema fondamentale del Calcolo integrale: per ogni $x>0$ abbiamo

$$f'(x)=f'(0)+\int_0^x f''(t)\,dt=\int_0^x f''(t)\,dt$$

(in effetti la relazione scritta sopra vale anche per $x<0$, ma qui non ci serve. Continuando a pensare $x>0$ abbiamo

$$\left|f'(x)\right| \le \int_0^x \left|f''(t)\right| dt \le 10x$$

Poi

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x f'(t)\,dt$$

e allora

$$\left|f(x)\right| \le \int_0^x \left|f'(t)\right| dt \le \int_0^x 10t\,dt = 5x^2$$

e quindi $\left|f(100)\right| \le 5 \cdot 100^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^5$ come si voleva dimostrare.

La maggiorazione non può essere migliorata perché $f(x) = 5x^2$ soddisfa le ipotesi, e per $x = 100$ vale proprio $\frac{1}{2} \cdot 10^5$.

5) Mirko acquista un'automobile che costa 40.000€, se pagata immediatamente. Il venditore propone in alternativa un pagamento rateale: 10.000€ subito, e 10 rate annuali posticipate, la prima tra un anno da oggi, ciascuna di 3500€; il venditore dichiara che il tasso annuo nominale ("*TAN*") dell'operazione è 2.906%. Tuttavia il finanziamento comporta "spese di apertura pratica" (immediate) di 500€ e, contestualmente al pagamento di ciascuna rata, "spese di gestione" di 50€,

a) Verificare la correttezza di quanto dichiarato dal venditore (*TAN* = 2.906%).

b) Verificare che il tasso effettivo dell'operazione, tenendo conto anche delle spese accessorie, ("*TAEG*") è superiore a 3.5%

(nessun calcolo necessita strumenti o *software* sofisticati, è sufficiente la calcolatrice scientifica).

Svolgimento.

Tenuto conto del pagamento immediato di 10.000€, il finanziamento riguarda la parte rimanente ossia 30.000€.

a) Il tasso del finanziamento è *i* tale che sia uguale a 30.000€ il valore attuale di una rendita di 10 annualità immediate posticipate di 3500€. Questo valore attuale è

$$3500 \cdot a_{\overline{10}|i} = 3500 \cdot \sum_{k=1}^{10} (1+i)^{-k} = 3500 \cdot (1+i)^{-1} \cdot \frac{1-(1+i)^{-10}}{1-(1+i)^{-1}} = 3500 \cdot \frac{1-(1+i)^{-10}}{i}$$

Se $i = 0.02906$ questo vale

$$3500 \cdot \frac{1-(1.02906)^{-10}}{0.02906} = 29.999.4$$

quindi (con minima approssimazione) proprio 30.000€. La piccolissima differenza è comunque a favore del cliente, perché il valore attuale di una rendita è decrescente al crescere del tasso, quindi il *TAN* è in realtà leggermente inferiore a 2.906%; con *Mathematica* si calcola il valore *i* = 0.0290564.

b) Tenendo conto delle spese aggiuntive, Mirko paga subito non 10.000€ bensì 10.500, e le rate non gli costano 3500€ ma invece 3550€. Quindi, rispetto al pagamento immediato di 40.000€, Mirko finanzia un valore attuale di 29.500€ con dieci annualità immediate posticipate di 3550€. Il *TAEG* per Mirko è quindi *i* tale che

$$29.500 = 3550 \cdot a_{\overline{10}|i} = 3550 \cdot \frac{1-(1+i)^{-10}}{i}$$

Il valore attuale relativo al tasso $i = 0.035$ sarebbe

$$V = 3550 \cdot a_{\overline{10}|\,0.035} = 3550 \cdot \frac{1-(1.035)^{-10}}{0.035} = 29\,523.95$$

leggermente superiore a 29500; quindi affinché V abbia questo valore occorre i maggiore (di poco) di 0.035. Con *Mathematica* si calcola il *TAEG* $i = 0.035161$.

6) Un impresario deve organizzare il concerto di un famoso cantante, che gli appassionati attendono da molto tempo. Per il giorno del concerto c'è incertezza sulle condizioni meteorologiche. In caso di bel tempo il concerto si potrà svolgere allo Stadio comunale, di grande capienza, con guadagno previsto di $3 \cdot 10^5$€; altrimenti è disponibile un locale coperto ("Palazzetto"), che può accogliere un numero minore di spettatori; in tal caso il guadagno previsto sarebbe $2 \cdot 10^5$€. Se il concerto si terrà allo stadio, in caso di maltempo dovrà essere rinviato al primo giorno di bel tempo, con costi aggiuntivi per l'organizzazione e conseguente riduzione del guadagno a $1.5 \cdot 10^5$€. Nella stagione in cui si svolgerà il concerto la probabilità di maltempo in un generico giorno è 0.2. L'impresario può avvalersi di un servizio molto affidabile di previsione meteorologica il quale, dietro compenso, potrà fornire indicazioni sul meteo del giorno del concerto, esatte con probabilità 90% (vale a dire: sia se piove, sia se c'è il sole, la probabilità che le previsioni l'avessero detto è del 90%).

a) Calcolare se, in base al criterio del massimo guadagno atteso, conviene organizzare il concerto allo stadio o al Palazzetto (senza avvalersi del servizio di previsione meteorologica).

b) Calcolare il valore dell'informazione relativa alla previsione meteorologica.

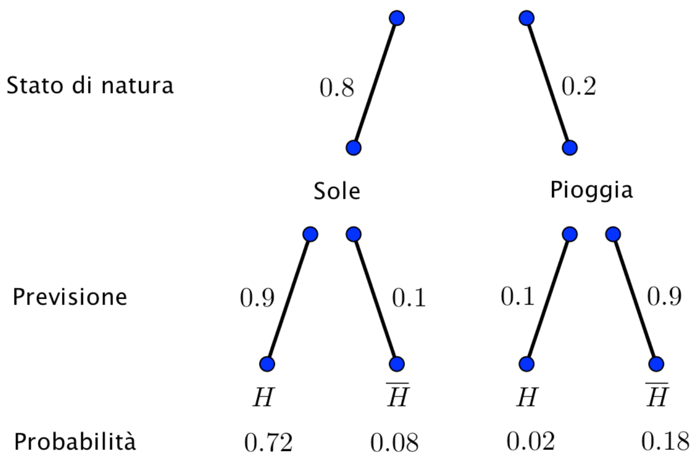
Svolgimento.

a) Le diverse possibilità riguardo alla decisione dell'impresario e alle sue conseguenze economiche legate alle condizioni meteorologiche del giorno del concerto sono riassunte nel seguente schema:

Meteo	*Stadio*	*Palazzetto*	Probabilità
Sole	3	2	0.8
Pioggia	1.5	2	0.2
$E(X_j)$	2.7	2	

Il guadagno atteso è maggiore organizzando il concero allo stadio; se questo è il criterio assunto per la scelta, il concerto deve essere organizzato allo stadio.

b) Riguardo alla previsione meteoriologica, sia H l'evento "il servizio meteo prevede sole", $\bar{H}$ l'evento complementare, "il servizio meteo prevede pioggia"; servono le probabilità di H e $\bar{H}$. Queste si calcolano nel modo reso evidente nello schema qui sotto:



Se ne deduce che

$$\rho_1 \equiv P(H) = 0.72 + 0.02 = 0.74\,; \qquad \rho_2 \equiv P(\bar{H}) = 1 - \rho_1 = 0.26$$

Ora ci servono le probabilità $p^{(H)} \equiv P(sole|H)$ e $p^{(\bar{H})} \equiv P(sole|\bar{H})$ (le corrispondenti probabilità di pioggia sono i rispettivi compementi a 1). Ancora servendoci dello schema qui sopra vediamo che

$$p^{(H)} \equiv P(sole|H) = \frac{P(sole \wedge H)}{P(H)} = \frac{0.72}{0.74} = 0.973$$

quindi $$q^{(H)} \equiv P(pioggia|H) = 1 - 0.973 = 0.027\,;$$

analogamente $$p^{(\bar{H})} \equiv P(sole|\bar{H}) = \frac{P(sole \wedge \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{0.08}{0.26} = 0.308$$

e quindi $$\bar{\bar{x}}^{(\mathcal{H})} = 0.74 \cdot 2.959 + 0.26 \cdot 2 = 2.71 \; q^{(\bar{H})} \equiv P(pioggia|\bar{H}) = 1 - 0.308 = 0.692$$

Ecco lo schema dei possibili guadagni e rispettivi valori attesi, rispettivamente nel caso di risposta *H* oppure $\bar{H}$ delle previsioni:

Meteo	*Stadio*	*Palazzetto*	Probabilità
Sole	3	2	$p_H = 0.973$
Pioggia	1.5	2	$q_H = 0.027$
$E(X_j|H)$	2.959	2	

Meteo	*Stadio*	*Palazzetto*	Probabilità
Sole	3	2	$p_{\bar{H}} = 0.308$
Pioggia	1.5	2	$q_{\bar{H}} = 0.692$
$E(X_j|\bar{H})$	1.962	2	

Perciò la risposta delle previsioni meteorologiche condiziona la scelta: in caso di previsione *H* (sole) la decisione sarà: Stadio; se la previsione è $\bar{H}$ (pioggia), la decisione sarà: Palazzetto; quindi l'informazione ha valore non nullo, che ora andiamo a calcolare.

Il guadagno atteso condizionato all'assunzione dell'informazione sul meteo è

$$\bar{\bar{x}}^{(\mathcal{H})} = 0.74 \cdot 2.959 + 0.26 \cdot 2 = 2.71$$

Il guadagno atteso se non si acquista l'informazione sul meteo del giorno del concerto è 2.7, calcolata in (a); l'unità di misura è sempre $10^5€$; il valore dell'informazione è quindi $0.01 \cdot 10^5€ = 1000€$.

Osservazione. L'incremento di guadagno atteso che si ottiene grazie all'assunzione dell'informazione sul meteo è molto piccolo: da 2.7 a 2.71; l'informazione non è "inutile" ma, in pratica, è poco utile. Ciò dipende dal fatto che nel caso $\bar{H}$, in cui si è condotti alla decisione opposta a quella che si sarebbe assunta in mancanza d'informazione, l'incremento di guadagno atteso è piuttosto esiguo: da 1.962 a 2; a causa di ciò il valore dell'informazione risulta molto basso rispetto all'ordine di grandezza degli importi trattati.

w